Kapitola 6

UŽITÍ DERIVACE

Cílem závěrečné kapitoly diferenciálního počtu funkce jedné proměnné je uvedení některých možností využití derivací. Pomocí nich budeme počítat limity neurčitých výrazů a určovat řadu vlastností, jako je monotónnost, konvexita a konkávita, charakterizujících funkce. Znalost těchto vlastností nám v závěru kapitoly umožní vyšetřovat průběh funkce a načrtnout její graf.

6.1 L´Hospitalovo pravidlo

V kapitole o limitách jsme se seznámili s limitami neurčitých výrazů typu $\left\| \frac{0}{0} \right\|$ nebo $\left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$**.** Některé z nich jsme počítali úpravami funkce a následným krácením, jiné (např. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$) jsme vypočítat neuměli. Následující věta uvádí novou, mnohem účinnější metodu pro řešení limit neurčitých výrazů typu $\left\| \frac{0}{0} \right\|$ nebo $\left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$.

L´Hospitalovo pravidlo

Věta 6.1.: Nechť limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ je typu $\left\| \frac{0}{0} \right\|$ nebo $\left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$.Potom, jestliže existuje limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, existuje i limita $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Věta platí i pro limitu v nevlastním bodě a pro jednostranné limity.

Příklad 6.1.

Vypočítejte limitu: a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$.

Řešení : a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ je limita typu $\left\| \frac{0}{0} \right\|$. Existuje $(\sin x)'$ a x', proto můžeme použít L´Hospitalovo pravidlo : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x - 2\sin x\cos x}{-2\cos x\sin x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x - \cos x}{\sin 2x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| =$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 2x + \sin x}{2\cos 2x} = \frac{-2+1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Jak ukazuje poslední úloha, L´Hospitalova pravidla lze používat i opakovaně, pokud jsou splněny předpoklady věty. Tedy pokud i po derivaci dostaneme limitu typu $\left\| \frac{0}{0} \right\|$ nebo $\left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|$.

!*!Limity neurčitých výrazů typu $\|0\cdot\infty\|$, $\|\infty-\infty\|$, $\|1^{\infty}\|$, $\|\infty^{0}\|$, $\|0^{0}\|$

Ve 4. kapitole jsme se seznámili i s dalšími typy limit neurčitých výrazů. Tyto limity se nyní naučíme řešit převodem na limity typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$ s následným použitím L´Hospitalova pravidla.

- Neurčitý výraz typu $\|0.\infty\|$

Limitu $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x).g(x)]$, kde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$, počítáme úpravou součinu $f(x).g(x)$ typu $\|0.\infty\|$ na podíl $\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ (nebo $\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$) typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ (nebo $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$).

Příklad 6.2.

Vypočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 1}(1-x).\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

Řešení : $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ je typu $\|0\cdot\infty\|$. Upravíme tedy součin podle návodu na podíl typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$: $(1-x).\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}=\dfrac{1-x}{\dfrac{1}{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}}=\dfrac{1-x}{\mathrm{cotg}\frac{\pi x}{2}}$ (využili jsme přitom vztah $\mathrm{cotg}\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$).

Pomocí L´Hospitalova pravidla nyní dostaneme:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\mathrm{cotg}\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\dfrac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{2.\sin^2\frac{\pi x}{2}}{\pi}=\frac{2.\sin^2\frac{\pi}{2}}{\pi}=\frac{2.1}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

- Neurčitý výraz typu $\|\infty-\infty\|$

Limitu $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$, kde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ (nebo obě limity mají hodnotu $-\infty$) počítáme úpravou rozdílu $f(x)-g(x)$ typu $\|\infty-\infty\|$ na podíl $\dfrac{1/g(x)-1/f(x)}{1/[f(x).g(x)]}$ typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$.

Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ ve tvaru podílu, stačí často převést je na společného jmenovatele.

Příklad 6.3.

Vypočítejte : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Řešení : Jde o limitu je typu $\|\infty-\infty\|$, proto podle návodu vyjádříme rozdíl jako podíl a pak použijeme L´Hospitalovo pravidlo :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{(x-1)\cdot\ln x}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x\ln x-x+1}{x}}{\dfrac{(x-1)\cdot\ln x}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x.\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1.\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1}{1.\ln x+(x-1)\cdot\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x-\dfrac{1}{x}+1}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

V tomto příkladě bylo ovšem jednodušší obě funkce převést na společného jmenovatele:
$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x.\ln x-(x-1)}{(x-1)\cdot\ln x}$ a okamžitě bychom obdrželi limitu typu $\left\|\dfrac{0}{0}\right\|$.

- Neurčitý výraz typu $\left\|0^0\right\|$, $\left\|\infty^0\right\|$, $\left\|1^\infty\right\|$

Limitu $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)^{g(x)}\right]$ uvedených typů počítáme úpravou výrazu $f(x)^{g(x)}$ na tvar $e^{g(x).\ln f(x)}$. Protože exponent $f(x)\cdot\ln(g(x))$ je výraz typu $\|0.\infty\|$, lze pro výpočet $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).\ln g(x)\right]$ použít výše popsaný postup.

Celkem tedy $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)^{g(x)}\right]=\lim\limits_{x\to x_0}e^{g(x).\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x).\ln f(x)}$.

Příklad 6.4.

Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Řešení : Jde o limitu typu $\left\|1^\infty\right\|$, proto upravíme výraz $(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ na tvar $e^{\frac{3}{x^2}.\ln(\cos 2x)}$. Potom

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{3}{x^2}.\ln(\cos 2x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{x^2}.\ln(\cos 2x)}=e^L.$$

Nyní vypočítáme limitu L v exponentu :

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}.\ln(\cos 2x)=\|\infty\cdot 0\|=\lim_{x\to 0}\frac{3.\ln(\cos 2x)}{2x}=\left\|\frac{0}{0}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{3.\dfrac{(-\sin 2x).2}{\cos 2x}}{2x}=$$

$=-6.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}.\dfrac{1}{\cos 2x}=-6$ (zde jsme využili toho, že $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{kx}=1$; jinak bylo možné ještě jednou použít L´Hospitalovo pravidlo).

Celkem $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{-6}$.

Úlohy 6.1.

Vypočítejte limity funkcí užitím L´Hospitalova pravidla.

1. a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3-3x^2-2x-2}$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-2x^2+x}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-7}{3x^2+x-2}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\mathrm{tg}x}$,

e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\mathrm{tg}x-1}{\sin 4x}$, f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\sin 2x-\cos x}$, g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5}{e^{4x}}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5}{e^{2x}}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x^3}$, k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln|\sin(2x)|}{\ln|\sin(3x)|}$, l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$, m) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{\sin x}$,

o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$, p) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$, q) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-x}{\sin^2 x}$, r) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

2. Vypočítejte limity funkcí užitím L´Hospitalova pravidla :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2.\sin\dfrac{1}{x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\ln x.\ln(1-x)\right]$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty}x.e^x$, d) $\lim\limits_{x\to 0}x^2.e^{\frac{1}{x^2}}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x).\mathrm{cotg}\,x$.

3. a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x-\dfrac{1}{x}\right)$, b) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$,

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

4. Vypočítejte limity funkcí :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cos\dfrac{2}{x}\right)^{x^2}$, c) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{x^4+\ln x}}$, d) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$, e) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$,

g) $\lim\limits_{x\to\pi}(1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$.

Výsledky úloh 6.1.

1. a) $-4/7$,b) 1, c) ∞, d) 0, e) $-\dfrac{1}{2}$, f) 0, g) 1, h) 0, i) 0, j) $\dfrac{1}{3}$, k) 1, l) $\dfrac{1}{2}$, m) 1, n) -1, o) 1,

p) $\dfrac{1}{2}$, q) 1, r) $\dfrac{1}{2}$.

2. a) $-\infty$, b) 0, c) 0, d) ∞, e) 0.

3. a) 0, b) $\dfrac{1}{5}$, c) 0, d) $-\dfrac{1}{2}$, e) $-\infty$.

4. a) 1, b) e^{-2}, c) e^3, d) 1, e) 1, f) e^2, g) e^3.

6.2 Vyšetřování monotónnost funkce a lokálních extrémů

Pojem monotónnosti byl definován v 1. kapitole. Připomeňme, že se jedná o vyjádření toho, zda je funkce v bodě (na intervalu) rostoucí či klesající. Tuto důležitou vlastnost funkce budeme nyní vyšetřovat pomocí znaménka první derivace.

Věta o monotónnosti funkce v bodě

Věta 6.2.: Nechť funkce $y=f(x)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$ a platí $f'(x_0)>0$ ($f'(x_0)<0$). Pak je funkce $f(x)$ v tomto bodě rostoucí (klesající).

Příklad 6.5.

Vyšetřete monotónnost funkce $f: y=3x^4-4x^3$ v bodech $x_1=-1$, $x_2=2$.

Řešení : $D(f)=\mathbf{R}$.Vypočítáme první derivaci funkce : $f'(x)=12x^3-12x^2$.

Podle věty 6.2. určíme monotónnost funkce v bodě podle hodnoty první derivace v tomto bodě. Pro $x_1=-1$ je $f'(-1)=12(-1)^3-12(-1)^2=-12-12=-24<0$.

Funkce f je tedy v bodě $x_1=-1$ klesající.

Pro $x_2=2$ je $f'(2)=12(2)^3-12(2)^2=12.8-12.4=96-48=48>0$.

Funkce f je tedy v bodě $x_2=2$ rostoucí.

Poznámka: Opačné tvrzení k větě 6.2. neplatí. Tedy, je-li funkce v určitém bodě např. rostoucí, nemusí mít v tomto bodě kladnou derivaci.

Funkce $y=x^3$ je v bodě $x=0$ zřejmě rostoucí (viz grafy základních elementárních funkcí), ale její derivace v tomto bodě je rovna nule : $y'=3x^2$, $y'(0)=0$.

Věta o monotónnosti funkce na intervalu

Věta 6.3.: Nechť funkce $f(x)$ má na intervalu (a,b) derivaci $f'(x)$. Jestliže pro všechna $x \in (a,b)$ je

- $f'(x) > 0$, je funkce $f(x)$ na tomto intervalu rostoucí,
- $f'(x) < 0$, je funkce $f(x)$ na tomto intervalu klesající.

Při vyšetřování monotónnosti funkce je možné postupovat dvěma způsoby. První vychází přímo z věty 6.3. a spočívá v řešení nerovnice $f'(x) > 0$ a $f'(x) < 0$. Výsledkem jsou pak intervaly monotónnosti.

Při vyšetřování monotónnosti druhým způsobem se vyhneme řešení nerovnic. Na číselnou osu nanesme všechny body, ve kterých je derivace rovna nule nebo není definovaná. Derivace totiž může měnit znaménko pouze v těchto bodech. Tedy pouze tyto body mohou být krajními body intervalů, na nichž je funkce rostoucí nebo klesající. K určení znaménka derivace v každém z intervalů pak stačí určit znaménko v některém vnitřním bodě tohoto intervalu. Je vhodné zvolit takový bod *x*, v němž se hodnota $f'(x)$ snadno vypočítá.

Příklad 6.6.

Vyšetřete monotónnost funkce (tj. určete intervaly růstu a klesání funkce):

a) $f: y = x^3 - 6x^2 + 9x,\ D(f) = \mathbf{R}$,

b) $g: y = \dfrac{x^2}{x-1},\ D(g) = \mathbf{R}/\{1\}$,

c) $h: y = x^2.e^{-x},\ D(h) = \mathbf{R}$.

Řešení : a) Nejprve vypočítáme první derivaci funkce a upravíme ji :

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$.

První způsob vyšetřování monotónnosti :

Řešíme nerovnice $3(x-1)(x-3) < 0$ a $3(x-1)(x-3) > 0$.

Vzhledem k tomu, že grafem první derivace je parabola, otevřená směrem nahoru, která protíná osu *x* v bodech $x_1 = 1,\ x_2 = 3$, je řešením první nerovnice interval $(1, 3)$, v němž je daná funkce klesající. Řešením druhé nerovnice jsou intervaly $(-\infty, 1)$ a $(3, +\infty)$, v nichž je daná funkce rostoucí.

Druhý způsob vyšetřování monotónnosti :

Protože první derivace funkce je definovaná pro všechna $x \in \mathbf{R}$, může se monotónnost měnit pouze v nulových bodech první derivace (tj. v bodech, v nichž je první derivace rovna nule). V naší úloze jsou to body $x_1 = 1,\ x_2 = 3$.

Pro určení znaménka první derivace funkce v intervalu $(-\infty, 1)$ vypočítáme její hodnotu v libovolném bodě tohoto intervalu.

Například pro $x = 0$ je $f'(0) = 3.0 - 12.0 + 9 = 9 > 0$.

Tedy funkce je v tomto bodě a také na celém intervalu $(-\infty, 1)$ rostoucí.

Pro určení znaménka první derivace funkce v intervalu $(1, 3)$ vypočítáme je-jí hodnotu v libovolném bodě tohoto intervalu.

Například pro $x = 2$ je $f'(2) = 3.2^2 - 12.2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3 < 0$.

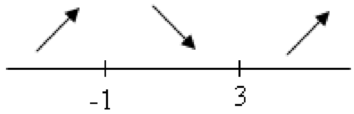
Tedy funkce je v tomto bodě a také na celém intervalu $(1, 3)$ klesající.

Pro určení znaménka první derivace funkce v intervalu $(3, +\infty)$ vypočítáme její hodnotu v libovolném bodě tohoto intervalu.

Například pro $x = 4$ je $f'(4) = 3.4^2 - 12.4 + 9 = 48 - 48 + 9 = 9 > 0$.

Tedy funkce je v tomto bodě a také na celém intervalu $(3, +\infty)$ rostoucí.

Symbolicky budeme monotónnost funkce vyjadřovat takto :



b) Vypočítáme první derivaci funkce $g(x)$ a upravíme ji:

$$g'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

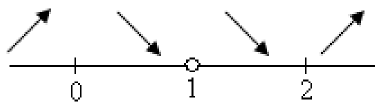
Určíme nulové body první derivace : $\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$.

Jsou to body $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Funkce $g(x)$ může měnit monotónnost také v bodě, v kterém derivace neexistuje. Je to bod $x_3 = 1$.

První způsob vyšetřování monotónnosti:

Řešíme nerovnice $\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} < 0$ a $\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} > 0$.

Vzhledem k tomu, že jmenovatel je vždy kladný, budeme se zabývat pouze znaménkem čitatele. Parabola $x^2 - 2x$ je otevřená směrem nahoru a protíná osu x v bodech $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. První derivace je tedy v intervalu $(0, 1) \cup (1, 2)$ záporná a v intervalu $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ kladná. Znaménko první derivace a monotónnost funkce vyjádříme diagramem :



Druhý způsob vyšetřování monotónnosti :

Vypočítáme znaménka derivace $g'(x)$ v jednotlivých intervalech:

v intervalu $(-\infty, 0)$ zvolíme $x = -1$: $g'(-1) = \dfrac{(-1)^2 - 2(-1)}{(-1-1)^2} = \dfrac{1+2}{4} > 0$,

v intervalu $(0, 1)$ zvolíme $x = \dfrac{1}{2}$: $g'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{-}{+} < 0$,

v intervalu $(1, 2)$ zvolíme $x = \dfrac{3}{2}$: $g'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\frac{9}{4} - 3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{-}{+} < 0$,

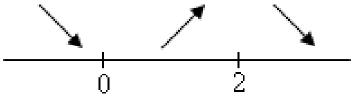
v intervalu $(2, \infty)$ zvolíme $x = 3$: $g'(3) = \dfrac{9-6}{2^2} = \dfrac{+}{+} > 0$.

Funkce $g(x)$ je rostoucí v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, +\infty)$, klesající v intervalech $(0, 1)$ a $(1, 2)$.

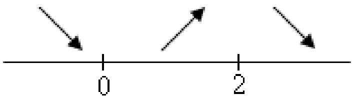
Druhý způsob byl pracnější, protože bylo potřeba určovat hodnotu první derivace v bodech ve tvaru zlomků.

c) Vypočítáme první derivaci funkce $h(x)$: $h'(x) = 2x.e^{-x} - x^2.e^{-x}$ a pak nulové body první derivace : $2.x.e^{-x} - x^2.e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x.e^{-x}.(2-x) = 0$. Nulové body tedy jsou $x_1 = 0,\ x_2 = 2$.
Protože první derivace funkce je definovaná pro všechna $x \in \mathbf{R}$, může se monotónnost měnit pouze v nulových bodech první derivace.

První způsob vyšetřování monotónnosti:
Řešíme nerovnice $e^{-x}.(2x - x^2) < 0$ a $e^{-x}.(2x - x^2) > 0$. Výraz e^{-x} má vždy kladnou hodnotu, budeme se proto zabývat jen znaménkem funkce $2x - x^2$. Jejím grafem je parabola otevřená směrem dolů, která protíná osu x v bodech $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. Znaménko první derivace je tedy možné vyjádřit diagramem :



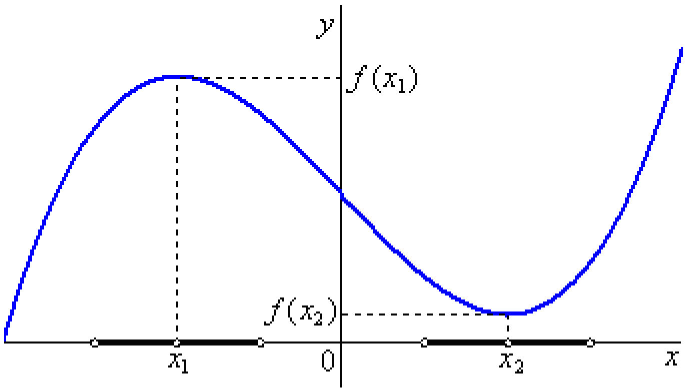
Druhý způsob vyšetřování monotónnosti :
Určíme znaménka první derivace v jednotlivých intervalech.
Pro $x \in (-\infty, 0)$, zvolíme $x = -1$: $h'(-1) = 2(-1).e - (-1)^2.e = -3e < 0$,
pro $x \in (0, 2)$, zvolíme $x = 1$: $h'(1) = 2(1).e^{-1} - (1)^2.e^{-1} = \dfrac{1}{e} > 0$,
pro $x \in (2, +\infty)$, zvolíme $x = 3$: $h'(3) = 2(3).e^{-3} - (3)^2.e^{-3} = \dfrac{-3}{e^3} < 0$.
Funkce $h(x)$ je rostoucí v intervalu $(0, 2)$ a klesající v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(2, +\infty)$.



Lokální extrémy

Definice 6.4.: Funkce $f(x)$ má v bodě
- x_1 lokální minimum, když existuje ryzí okolí tohoto bodu, ve kterém platí $f(x) > f(x_1)$,
- x_2 lokální maximum, když existuje ryzí okolí tohoto bodu, ve kterém platí $f(x) < f(x_2)$.

Lokální maxima a lokální minima funkce nazýváme lokální extrémy.



Poznámka : Bod x_0, pro který platí $f'(x_0) = 0$, budeme nazývat stacionárním bodem. Ve stacionárním bodě má funkce tečnu rovnoběžnou s osou *x*.

Věta o nutné podmínce pro extrém

Věta 6.5.: (Fermatova) Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li derivace $f'(x_0)$, pak platí $f'(x_0)=0$.

Poznámka : Uvedená věta však není dostatečnou podmínkou pro existenci lokálního extrému. Například funkce $y=x^3$ má derivaci $y'=3x^2$ v bodě $x_0=0$ rovnu nule, ale z grafu je zřejmé, že v tomto bodě lokální extrém nenastává.

Důsledek Fermatovy věty

Věta 6.6.: Spojitá funkce může nabýt lokálního extrému buď ve stacionárních bodech nebo v bodech, ve kterých nemá derivaci.

Věta o postačujících podmínkách pro extrém

Věta 6.7.: Nechť funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0, který je stacionárním bodem funkce $f(x)$, nebo bodem, v němž neexistuje derivace. Pak jestliže

- $f'(x)>0$ v levém okolí bodu x_0 a $f'(x)<0$ v pravém okolí bodu x_0, nastává v bodě x_0 lokální maximum,
- $f'(x)<0$ v levém okolí bodu x_0 a $f'(x)>0$ v pravém okolí bodu x_0, nastává v bodě x_0 lokální minimum.

Lokální extrém tedy nastává ve stacionárních bodech nebo v bodech, kde derivace neexistuje, ve kterých derivace funkce mění znaménko.

Pokud nastává lokální extrém v bodě, ve kterém derivace neexistuje, nebo je nevlastní, jde o bod vratu nebo úhlový bod (viz kapitola 5.1. a příklad 6.7.c).

O lokálním extrému ve stacionárním bodě je možné rozhodnout též pomocí následující věty, která ovšem předpokládá znalost druhé derivace.

Věta (alternativní) o určování extrémů

Věta 6.8.: Nechť funkce $f(x)$ má ve stacionárním bodě x_0 první i druhou derivaci. Pak v tomto bodě nastává

- lokální maximum, je-li $f''(x_0)<0$,
- lokální minimum, je-li $f''(x_0)>0$.

Je-li $f''(x_0)=0$, lokální extrém v bodě x_0 nastat může, ale nemusí.

Příklad 6.7.

Najděte lokální extrémy funkce: a) $f:\ y=e^x+e^{-x}$, b) $g:y=\dfrac{x^2}{x-1}$, c) $h:y=(5-x)\cdot\sqrt[3]{x^2}$.

Řešení : a) První způsob - pomocí věty 6.7. $D(f)=\mathbf{R}$.

Vypočítáme první derivaci zadané funkce $f'(x)=e^x+e^{-x}.(-1)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}$, určíme její stacionární body a body, ve kterých derivace neexistuje:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{e^{2x}-1}{e^x}=0\Leftrightarrow e^{2x}-1=0\Leftrightarrow e^{2x}=1\Leftrightarrow x=0.$$

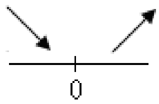
Stacionárním bodem je tedy bod $x=0$.

První derivace je definovaná pro všechna $x \in \mathbf{R}$.
Zda v bodě $x = 0$ nastane lokální extrém, zjistíme podle znaménka $f'(x)$.

To určíme řešením nerovnic $\dfrac{e^{2x}-1}{e^x} > 0\ (< 0)$. Vzhledem k tomu, že exponenciální funkce e^x nabývá pouze kladných hodnot, stačí se zabývat pouze čitatelem :

$$e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

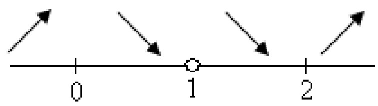
Podobně bychom dostali $e^{2x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$.



Protože v levém okolí bodu $x = 0$ funkce klesá a v pravém okolí tohoto bodu funkce roste, nastává podle věty 6.7. v bodě $x = 0$ lokální minimum.
Hodnota funkce v bodě lokálního minima je $f(0) = e^0 + e^0 = 2$.
(Řešení nerovnic bychom se mohli vyhnout určením znaménka první derivace v intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ dosazením : $f'(-1) = e^{-1} - e = \dfrac{1-e^2}{e} < 0,\ f'(1) = e - e^{-1} = \dfrac{e^2-1}{e} > 0$).

Druhý způsob - pomocí věty 6.8.
Určíme druhou derivaci funkce a její znaménko ve stacionárním bodě. Podle tohoto znaménka určíme druh lokálního extrému.
$f''(x) = e^x - e^{-x}.(-1) = e^x + e^{-x}$, $f''(0) = e^0 - e^0.(-1) = 1 + 1 = 2 > 0$, tedy v bodě $x = 0$ nastává lokální minimum.

b) Při řešení úlohy využijeme výsledky příkladu 6.6. Tam jsme zjistili, že monotónnost funkce $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ je možné vyjádřit diagramem



Na základě věty 6.7. nastává tedy v bodě $x = 0$ lokální maximum a v bodě $x = 2$ lokální minimum.

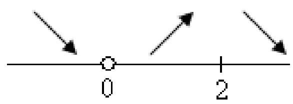
c) $D(h) = \mathbf{R}$.

První derivace $f'(x) = -x^{\frac{2}{3}} + (5-x)\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{-3x + (5-x)\cdot 2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{2-x}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$,

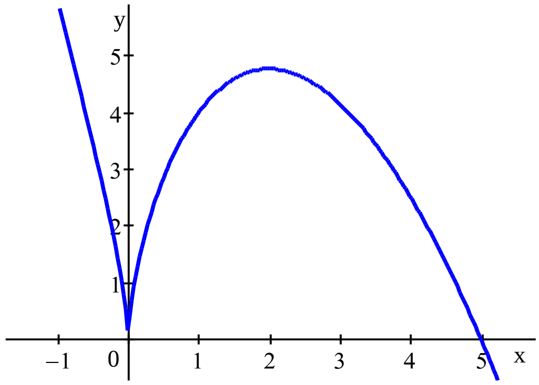
$f'(x)$ neexistuje $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Pomocí znamének první derivace určíme monotónnost funkce :



Z věty 6.7. vyplývá, že v bodě $x = 0$ má funkce lokální minimum a v bodě $x = 2$ lokální maximum.

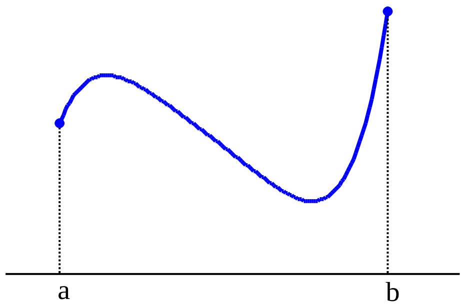
Všimněte si, že v bodě $x=0$ funkce nemá derivaci (platí $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$), ale je v tomto bodě definovaná. Jde o bod vratu.



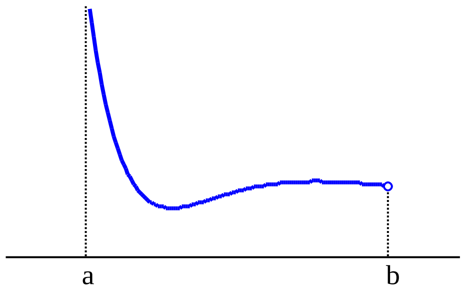
Absolutní extrém

Definice 6.9.: Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbf{I} \subseteq D(f)$ absolutní maximum (minimum), když pro každý bod $x \in \mathbf{I}$, takový, že $x \neq x_0$, platí $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).
Absolutní maximum a absolutní minimum nazýváme absolutní extrémy.

Poznámka : Funkce spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá svých absolutních extrémů buď v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech intervalu (obr.1).



obr.1



obr.2

Funkce spojitá na otevřeném intervalu (a, b) zde nemusí mít absolutní extrémy. Pokud je má, je to v bodech lokálních extrémů (na obr.2 má funkce pouze absolutní minimum).

Příklad 6.8.

Určete absolutní extrémy funkce $f: y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ na intervalu $\langle -2, 1\rangle$.

Řešení: Funkce $f(x)$ je na daném uzavřeném intervalu spojitá, proto bude mít absolutní extrémy v bodech lokálních extrémů nebo v krajních bodech intervalu $\langle -2, 1\rangle$. Určíme tedy hodnoty funkce v bodech lokálních extrémů a porovnáme je s funkčními hodnotami v krajích bodech intervalu $\langle -2, 1\rangle$.

$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \Leftrightarrow 5x^2.(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow 5x^2.(x-3).(x-1) = 0$

Stacionární body, ležící v intervalu $\langle -2, 1\rangle$ jsou čísla $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ (tento bod je současně krajním bodem zadaného intervalu).

Porovnáním funkčních hodnot v bodech -2, 0, 1

$f(-2) = (-2)^5 - 5.(-2)^4 + 5.(-2)^3 + 1 = -151$,

$f(0)=0^5-5.0^4+5.0^3+1=1$,

$f(1)=1^5-5.1^4+5.1^3+1=2$,

zjistíme, že funkce $f(x)$ má na intervalu $\langle -2, 1\rangle$ absolutní minimum v bodě $x=-2$ a absolutní maximum v bodě $x=1$, přičemž $f(-2)=-151, f(1)=2$.

Úlohy 6.3.

1. Vyšetřete monotónnost funkce f v bodě x_0:

a) $f: y=2x^3-15x^2+36x$, $x_0=-2,\ x_0=\dfrac{5}{2}$, b) $f: y=x+\sin x$, $x_0=-\dfrac{\pi}{3},\ x_0=\dfrac{5}{2}\pi$.

2. Vyšetřete monotónnost funkce v celém definičním oboru :

a) $f: y=-x^3+3x^2-6x-7$, b) $f: y=2x^3-3x^2$, c) $f: y=\dfrac{x}{x^2+1}$,

d) $f: y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$, e) $f: y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, f) $f: y=x.e^{-x^2}$.

3. Vyšetřete lokální extrémy funkce f:

a) $f: y=x^3-3x^2$, b) $f: y=x+\cos 2x,\ x\in\langle 0,\pi\rangle$, c) $f: y=\dfrac{x^2}{1-x}$, d) $f: y=\dfrac{x}{1+x^2}$,

e) $f: y=\dfrac{e^x}{1+x}$, f) $f: y=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$, g) $f: y=\dfrac{\ln x}{x}$, h) $f: y=x^2\cdot\ln x$, i) $f: y=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$.

4. Vyšetřete absolutní extrémy funkce f:

a) $f: y=\sin^3 x+\cos^3 x,\ x\in(0,\pi)$, b) $f: y=x^2.\ln x,\ x\in\langle 1, e\rangle$.

Výsledky 6.3.

1. a) v bodě –2 je funkce rostoucí, v bodě $\dfrac{5}{2}$ je klesající, b) funkce je v obou bodech rostoucí.

2. a) klesající v **R**, b) rostoucí pro $x\in(-\infty,0),(1,+\infty)$, kles. pro $x\in(0,1)$,

c) rostoucí pro $x\in(-1,1)$, klesající pro $x\in(-\infty,-1),(1,+\infty)$,

d) rostoucí pro $x\in\left(-\sqrt[3]{2},0\right)$, klesající pro $x\in\left(-\infty,-\sqrt[3]{2}\right),(0,+\infty)$,

e) rostoucí pro $x\in\left(0,e^2\right)$, klesající pro $x\in\left(e^2,+\infty\right)$,

f) rostoucí pro $x\in\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, kles. pro $x\in\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.

3. a) v bodě 0 je lokální maximum, v bodě 2 je lokální minimum,

b) v bodě $\dfrac{\pi}{12}$ je lokální maximum, v bodě $\dfrac{5\pi}{12}$ je lokální minimum,

c) v bodě 0 je lokální minimum, v bodě 2 je lokální maximum,

d) v bodě -1 je lokální minimum, v bodě 1 je lokální maximum,

e) v bodě 0 je lokální minimum, f) v bodě 1 je lokální minimum,

g) v bodě *e* je lokální maximum, h) v bodě $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ je lokální minimum

i) v bodě -1 je lokální minimum.

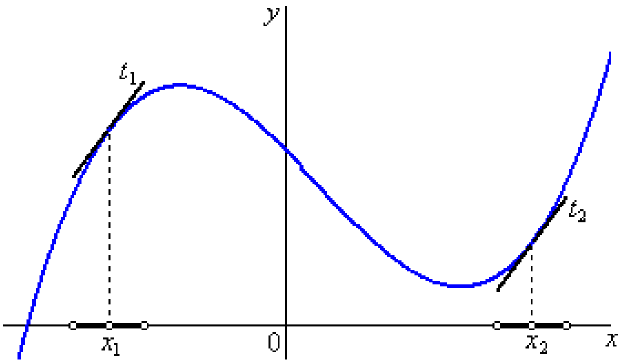
4. a) v bodě $\dfrac{\pi}{4}$ je absolutní minimum, v bodě $\dfrac{\pi}{2}$ je absolutní maximum,

b) v bodě 1 je absolutní minimum, v bodě e je absolutní maximum.

6.3 Konvexita, konkávita a inflexní body funkce

Konvexita a konkávita

Definice 6.10.: Funkci $f(x)$, která má derivaci v bodě x_0, nazveme konvexní (konkávní) v tomto bodě, jestliže existuje ryzí okolí bodu x_0 tak, že pro všechna čísla x z tohoto okolí leží graf funkce $f(x)$ nad (pod) tečnou sestrojenou ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Tedy když platí $f(x) > f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$ ($f(x) < f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0)$).



Poznámka : Funkci nazveme konvexní (konkávní) na otevřeném intervalu, je-li konvexní (konkávní) v každém bodě tohoto intervalu.

Věta o vyšetřování konvexity a konkávity

Věta 6.11. : Platí-li pro každé $x \in (a,b)$

- $f''(x) > 0$, pak je funkce na tomto intervalu konvexní,
- $f''(x) < 0$, pak je funkce na tomto intervalu konkávní.

Srovnáním s větou 6.3. je vidět, že konvexita a konkávita souvisí s druhou derivací funkce podobně jako monotónnost souvisela s první derivací. Toho budeme využívat při vyšetřování intervalů konvexity a konkávity.

Příklad 6.9.

Vyšetřete intervaly konvexity a konkávity funkce $f: y = x^4 - 2x^3 + 1$.
Řešení : Budeme postupovat podobně jako při vyšetřování monotónnosti, jen místo s první derivací budeme pracovat s druhou derivací.

$D(f) = \mathbf{R}$. Nejprve vypočítáme $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ a $f''(x) = 12x^2 - 12x$.

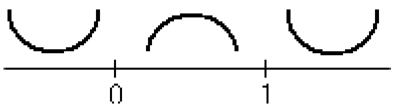
Vyšetříme, ve kterém intervalu platí $f''(x) > 0$, a ve kterém $f''(x) < 0$:

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x > 0 \Leftrightarrow 12x.(x-1) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

Tedy funkce je konvexní v intervalech $(-\infty, 0)$ a $(1, +\infty)$.

Pro $x \in (0,1)$ je $f''(x) < 0$, tedy v intervalu $(0,1)$ je funkce konkávní.

Symbolicky budeme konvexitu a konkávitu funkce vyjadřovat takto :



Poznámka: Bod x_0, pro který platí $f''(x_0) = 0$, budeme nazývat kritickým bodem.

Inflexní bod funkce

Definice 6.12. : Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci.
Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 inflexní bod a bod $[x_0, f(x_0)]$ nazveme inflexním bodem, jestliže existuje levé okolí bodu x_0, v němž je funkce $f(x)$ konvexní (konkávní) a pravé okolí bodu x_0, v němž je funkce konkávní (konvexní).

Poznámka: 1) Za inflexní bod považujeme i případ, kdy má funkce v bodě x_0 nevlastní derivaci (tečna ke grafu je v tomto bodě rovnoběžná s osou *y*).

2) V inflexním bodě přechází graf funkce z jedné strany tečny na druhou.

Věta o nutné podmínce pro existenci inflexního bodu

Věta 6.13.: Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 inflexní bod a existuje-li derivace $f''(x_0)$, pak platí $f''(x_0) = 0$.

Poznámka : Z věty vyplývá, že inflexní bod může nastat jen v kritických bodech kde $f''(x) = 0$ a v bodech ve kterých $f''(x)$ neexistuje.

Věta o postačujících podmínkách pro existenci inflexního bodu

Věta 6.14.: Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0, který je kritickým bodem funkce $f(x)$, nebo bodem, ve kterém neexistuje druhá derivace, spojitou první derivaci $f'(x_0)$.
Pak jestliže $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) v levém okolí bodu x_0 a $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) v pravém okolí bodu x_0, je v bodě x_0 inflexní bod.

Poznámka: Ze spojitosti první derivace v bodě x_0 vyplývá, že v tomto bodě existuje ke grafu funkce právě jedna tečna. To znamená, že v bodech, ve kterých má derivace zprava a zleva různou hodnotu (např. úhlové body a body vratu), nemá funkce inflexní bod, i když v těchto bodech přechází konvexita v konkávitu (nebo naopak).

O tom, zda má funkce v kritickém bodě inflexní bod, můžeme rozhodnout též pomocí následující věty.

Věta (alternativní) o určování inflexních bodů

Věta 6.15.: Nechť funkce $f(x)$ má v kritickém bodě x_0 třetí derivaci různou od nuly. Pak v tomto bodě nastává inflexní bod.

Příklad 6.10.

Vyšetřete intervaly, v nichž je funkce $f : y = \dfrac{x}{x^2+1}$ konvexní resp. konkávní a určete její inflexní body.

Řešení: Definiční obor funkce $D(f) = \mathbf{R}$.

Vypočítáme první a druhou derivaci :

$$y' = \frac{1.(x^2+1) - x.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2},$$

$$y''=\frac{-2x.\left(x^2+1\right)^2-\left(1-x^2\right)2.\left(x^2+1\right).2x}{\left(\left(x^2+1\right)^2\right)^2}=\frac{\left(x^2+1\right).\left[-2x.\left(x^2+1\right)-4x\left(1-x^2\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^4},$$

$$y''=\frac{2x.\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Určíme kritické body :

$$y''=0 \Leftrightarrow \frac{2x.\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \Leftrightarrow 2x.\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow x.\left(x-\sqrt{3}\right).\left(x+\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=-\sqrt{3} \vee x_2=0 \vee x_3=\sqrt{3}.$$

Funkce je konvexní právě tehdy, je-li $y''>0$ a konkávní je právě tehdy, je-li $y''<0$. Vzhledem k tomu, že jmenovatel $\left(x^2+1\right)^3$ je vždy kladný, stačí řešit nerovnice :

$$x.\left(x-\sqrt{3}\right).\left(x+\sqrt{3}\right)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{3},\,0\right)\cup\left(\sqrt{3},\,\infty\right),$$

$$x.\left(x-\sqrt{3}\right).\left(x+\sqrt{3}\right)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,\,\sqrt{3}\right).$$

Funkce $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ je konvexní pro $x\in\left(-\sqrt{3},\,0\right)\cup\left(\sqrt{3},\,\infty\right)$, konkávní pro $x\in\left(-\infty,\,-\sqrt{3}\right)\cup$ $\cup\left(0,\,\sqrt{3}\right)$.

Inflexní body má funkce v bodech $x_1=-\sqrt{3},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{3}$.

Poznámka: Při vyšetřování konvexity a konkávity je možné používat také postup, popsaný při vyšetřování monotónnosti. Spočívá v nalezení kritických bodů a bodů, ve kterých neexistuje druhá derivace a dosazením bodů ze získaných intervalů do druhé derivace. Podle znaménka druhé derivace v těchto bodech rozhodneme o konvexitě a konkávitě na celém intervalu.

Úlohy 6.3.

Vyšetřete konvexitu a konkávitu daných funkcí a určete jejich inflexní body:

a) $f: y=x^3-6x^3+12x-4$, b) $f: y=\dfrac{2x+5}{x-3}$, c) $f: y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$, d) $f: y=\dfrac{x^2+7}{x^2+3}$,

e) $f: y=x\cdot e^{-x}$, f) $f: y=x.\sqrt{x-1}$, g) $f: y=\dfrac{\ln x}{x}$, h) $f: y=\operatorname{cotg}x,\ x\in(0,\,\pi)$.

Výsledky 6.3.

a) konvexní pro $x\in(2,\,+\infty)$, konkávní pro $x\in(-\infty,\,2)$, IB v $x_1=2$,

b) konvexní pro $x\in(3,\,+\infty)$, konkávní pro $(-\infty,\,3)$, IB neexistují,

c) konvexní pro $x\in(-\infty,\,1)\cup(1,\,2)$, konkávní pro $x\in(2,\infty)$, IB v $x_1=2$,

d) konvexní pro $x\in(-\infty,\,-1)\cup(1,\,\infty)$, konkávní pro $x\in(-1,1)$, IB v $x_1=-1, x_2=1$,

e) konvexní pro $x\in(2,\,+\infty)$, konkávní pro $(-\infty,\,2)$, IB v $x_1=2$,

f) konvexní pro $x\in\left(\dfrac{3}{4},\,+\infty\right)$, konkávní pro $x\in\left(1,\,\dfrac{3}{4}\right)$, IB v $x_1=0, x_2=1$,

g) konvexní pro $x\in\left(e.\sqrt{e},\,+\infty\right)$, konkávní pro $x\in\left(0,\,e.\sqrt{e}\right)$, IB v $x_1=e.\sqrt{e}$,

h) konvexní pro $x\in\left(0,\,\dfrac{\pi}{2}\right)$, konkávní pro $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\,\pi\right)$, IB v $x_1=\dfrac{\pi}{2}$.

6.4 Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce postupujeme podle následujících bodů :

1) Určení definičního oboru a bodů nespojitosti.
2) Určení průsečíků s osami, vyšetření, kde je funkce kladná příp. záporná a vlastností funkce (sudost, lichost, periodičnost, atd.). Zjištění chování funkce v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti.
3) Vyšetření monotónnosti funkce a určení lokálních extrémů.
4) Vyšetření konvexity a konkávity, určení inflexních bodů.

!*!5) Určení asymptot grafu funkce.

6) Vytvoření tabulky význačných hodnot a načrtnutí grafu funkce.

Při kreslení grafu nejprve vyznačíme do souřadnicové soustavy význačné body funkce, tedy body nespojitosti, průsečíky s osami, body lokálních extrémů a inflexní body. Poté zakreslíme asymptoty grafu funkce. Na závěr načrtneme graf funkce, přičemž dbáme, aby splňoval všechny zjištěné vlastnosti, tj. polohu nad (pod) osou *x*, monotónnost, konvexitu a konkávitu, a aby se přibližoval k asymptotám ze správné strany.

Příklad 6.10.

Vyšetřete průběh funkce : a) $f: y = x^3 + 6x^2 + 9x$, b) $f: y = \dfrac{x^2}{x-1}$, c) $f: y = \dfrac{\ln x}{2x}$.

Řešení:

a) $D(f) = \mathbf{R}$,

$f(-x) = (-x)^3 + 6.(-x)^2 + 9.(-x) = -x^3 + 6x^2 - 9x \neq \pm f(x) \;\Rightarrow$ funkce f není sudá ani lichá.

Zjistíme chování funkce v krajních bodech definičního oboru :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+6x^2+9x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^3.\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)\right] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+6x^2+9x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^3.\left(1+\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}\right)\right] = +\infty.$$

Průsečík s osou y: $x = 0 \Rightarrow y = 0$, $P_y = [0, 0]$.

Průsečíky s osou *x* získáme řešením rovnice $x^3 + 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x.(x+3)^2 = 0$. Řešení rovnice je $x = 0 \vee x = -3$, tedy $P_x = [-3, 0]$ a $[0, 0]$.

Pro $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ je $f(x) < 0$ a pro $x \in (0, +\infty)$ je $f(x) > 0$.

Při vyšetřování monotónnosti a lokálních extrémů určíme nejprve první derivaci

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3.(x^2 + 4x + 3) = 3.(x+3).(x+1)$$

a stacionární body : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$.

Body, ve kterých není derivace definována, funkce nemá.

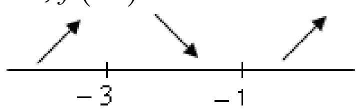
Na získaných třech intervalech vyšetříme monotónnost funkce :

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3.(x+3).(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$,

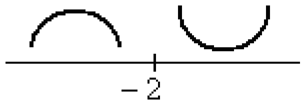
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3.(x+3).(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -1)$.

Tedy funkce je rostoucí v intervalech $(-\infty, -3)$ a $(-1, +\infty)$, klesající v intervalu $(-3, -1)$.

Lokální maximum má v bodě $x = -3$, $f(-3) = 0$ a lokální minimum v bodě $x = -1$, $f(-1) = -4$.



Pro vyšetření konvexity a konkávity vypočítáme druhou derivaci a najdeme její nulové body :
$f''(x) = 6x + 12 = 6.(x+2) \Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.
Na získaných dvou intervalech vyšetříme konvexitu a konkávitu :
$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > -2$ a $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$, tedy pro $x \in (-\infty, -2)$ je funkce konkávní, pro $x \in (-2, +\infty)$ je funkce konvexní.
Inflexní bod nastává v bodě $x = -2$ a má souřadnice $[-2, f(-2)]$.



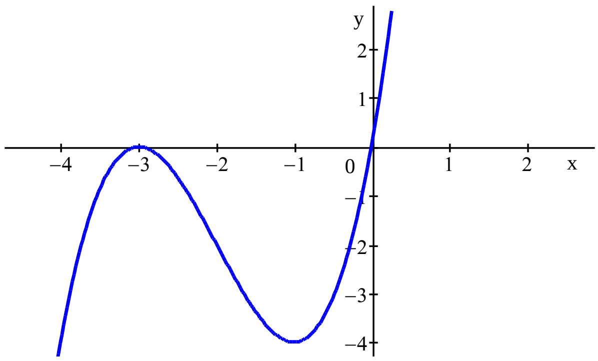
!*!Asymptoty bez směrnice neexistují, protože $D(f) = \mathbf{R}$ a funkce je všude spojitá. Asymptoty se směrnicí graf funkce také nemá , protože

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x^2 + 6x + 9\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x^2 . \left(1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right)\right] = +\infty$$

Tabulka význačných hodnot :

x	0	-3	-2	-1
y	0	0	-2	-4

Na základě všech zjištěných vlastností funkce načrtneme její graf :



b) $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{1\}$.
Funkce není ani sudá ani lichá, protože není definována v 1, ale v –1 ano.
Zjistíme chování funkce v krajních bodech definičního oboru :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{1-0} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{1-0} = +\infty,$$

a v bodě nespojitosti $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.
Průsečík s osou y $P_y = [0, 0]$ získáme dosazením $x = 0$ do funkční rovnice.
Průsečík s osou x získáme řešením rovnice $\frac{x^2}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Tedy $P_x = P_y = [0, 0]$.
Pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$ je $f(x) < 0$ a pro $x \in (1, +\infty)$ je $f(x) > 0$.
Pro výpočet monotónnosti a lokálních extrémů určíme první derivaci

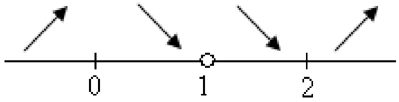
$$f'(x) = \frac{2x.(x-1) - x^2.1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Pomocí ní určíme stacionární body

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Stacionární body jsou tedy body $x_1 = 0, x_2 = 2$.

První derivace není definovaná v bodě $x_3 = 1$.
Na získaných třech intervalech vyšetříme monotónnost funkce:
$f'(x) \rangle\, 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ a $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1) \cup (1, 2)$.
Tedy funkce je rostoucí v intervalech $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ a klesající v intervalech $(0, 1)$, $(1, 2)$.
Funkce má tedy lokální maximum v bodě $x = 0$, $f(0) = 0$ a lokální minimum v bodě $x = 2$, $f(2) = 4$.



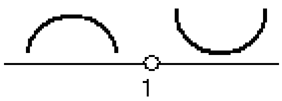
Pro vyšetření konvexity a konkávity vypočítáme druhou derivaci :

$$f''(x) = \frac{(2x-2).(x-1)^2 - (x^2-2x).2.(x-1).1}{(x-1^4)} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Nulové body druhá derivace nemá a není definovaná v bodě $x = 1$. Na získaných dvou intervalech vyšetříme konvexitu a konkávitu :

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \text{ a } f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1).$$

Tedy funkce je konvexní v intervalu $(1, +\infty)$ a konkávní v intervalu $(-\infty, 1)$. Inflexní bod funkce nemá.



!*!Asymptota bez směrnice má rovnici $x = 1$, protože $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$ a $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$.
Asymptotu se směrnicí $y = kx + q$ vypočítáme pomocí limit :

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

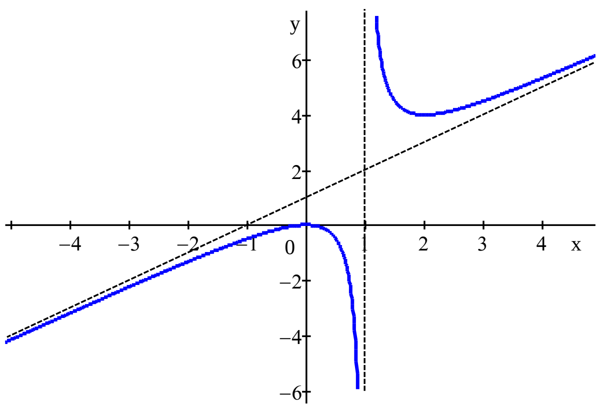
$$q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Tedy graf funkce f má asymptotu se směrnicí o rovnici $y = x + 1$.

Tabulka význačných hodnot :

x	0	2	$\frac{3}{2}$	-1
y	0	4	$\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Na základě všech zjištěných vlastností funkce načrtneme její graf :



c) $D(f)=(0,+\infty)$, proto funkce není ani sudá ani lichá.

Zjistíme chování funkce v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{2x}=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x}=0.$$

Průsečík s osou y neexistuje ($x\neq 0$), průsečík s osou x získáme řešením rovnice

$\frac{\ln x}{2x}=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$. Tedy $P_x=[1,0]$.

Pro $x\in(0,1)$ je $f(x)<0$ a pro $x\in(1,+\infty)$ je $f(x)>0$.

Pro výpočet monotónnosti a lokálních extrému určíme derivaci

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot 2x-\ln x.2}{4x^2}=\frac{2-2\ln x}{4x^2}=\frac{1-\ln x}{2x^2},$$

a řešením rovnice $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{2x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow x=e$ určíme stacionární bod $x=e$.

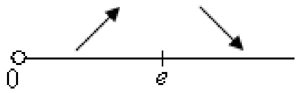
Na získaných dvou intervalech vyšetříme monotónnost funkce

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{2x^2}>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow x<e,$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{2x^2}<0 \Leftrightarrow 1-\ln x<0 \Leftrightarrow x>e.$$

Funkce je rostoucí v intervalu $(0,e)$ a klesající v intervalu $(e,+\infty)$.

Lokální maximum nastává v bodě $x=e$, $f(e)=\frac{1}{2e}$.



Pro vyšetření konvexity a konkávity vypočítáme druhou derivaci

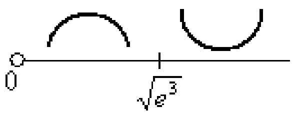
$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}.2x^2-(1-\ln x).4x}{4x^4}=\frac{-2x-4x+4x\ln x}{4x^4}=\frac{2x.(2\ln x-3)}{4x^4}=\frac{2\ln x-3}{2x^3}$$

a najdeme její nulové body

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{2x^3}=0 \Leftrightarrow 2\ln x-3=0 \Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}.$$

Na získaných dvou intervalech vyšetříme konvexitu a konkávitu :

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x>e^{\frac{3}{2}}$ a $f''(x)<0 \Leftrightarrow x<e^{\frac{3}{2}}$. Z toho plyne, že pro $x\in\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$ je funkce konkávní a pro $x\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$ je funkce konvexní. V bodě $x=e^{\frac{3}{2}}$ má funkce f inflexní bod.



!*!Určení asymptot.

Vzhledem k tomu, že $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{2x}=-\infty$, asymptota bez směrnice existuje a má rovnici $x=0$.

Asymptotu se směrnicí vypočítáme pomocí limit:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{2x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{4x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2}=0,$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln x}{2x}-0.x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0.$$

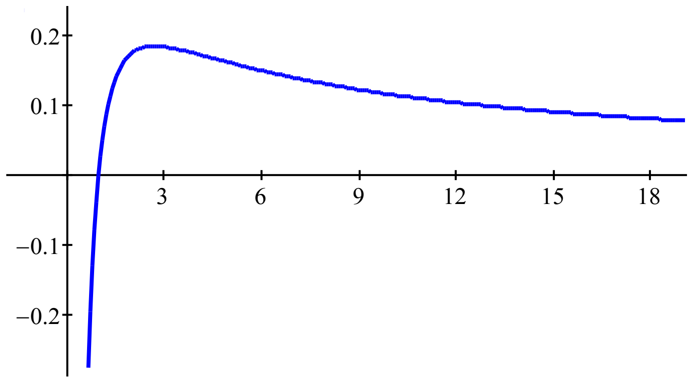
To znamená, že graf funkce f má asymptotu se směrnicí o rovnici $y=0$.

Tabulka význačných hodnot :

x	1	e	$e^{\frac{3}{2}}$	e^2
y	0	$\frac{1}{2e}$	$\frac{3.\sqrt{e}}{e^2}$	$\frac{1}{e^2}$

.

Na základě všech zjištěných vlastností funkce načrtneme její graf:



Úlohy 6.4.

Vyšetřete průběh funkce *f*: a) $y=x^4-6x^2+5$, b) $y=\frac{1-x^3}{x^2}$, c) $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$,

d) $y=\ln(1-x^2)$, e) $y=x^2e^{-x}$, f) $y=e^{x^2}$, g) $y=\frac{x}{\ln x}$, h) $y=x-2\operatorname{arctg}x$.

Výsledky 6.4.

a) $D(f)=\mathbf{R}$, je sudá, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $P_x=[\pm1{,}0],[\pm\sqrt{5},0]$, $P_y=[0,5]$, lok.min. v bodech $x=\pm\sqrt{3}$, lok.max. v bodě $x=0$, IB v bodech $x=\pm1$, asymptoty nemá.

b) $D(f)=\mathbf{R}/\{0\}$, není sudá ani lichá, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=+\infty$, $P_x=[1,0]$, P_y nemá, lok.min. v bodě $x=-\sqrt[3]{2}$, inflexní body nemá, funkce je konvexní v *D*(*f*), asymptoty: $x=0$, $y=-x$,

c) $D(f)=\mathbf{R}/\{1\}$, není sudá ani lichá, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$, P_x nemá, $P_y=[0,2]$, lok. max. v bodě $x=0$, lok. min. v bodě $x=2$, pro $x\in(-\infty,1)$ je funkce konvexní, pro $x\in(1,\infty)$ je funkce konkávní, asymptoty $x=1$, $y=x-1$,

d) $D(f)=(-1,1)$, je sudá, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\infty$, $P_x=P_y=[0,0]$, lok. max. v bodě $x=0$, funkce je konkávní v $D(f)$, asymptoty $x=\pm1$.

e) $D(f)=\mathbf{R}$, není sudá ani lichá, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $P_x = P_y = [0,\, 0]$, lok. min. v bodě $x=0$, lok. max. v bodě $x=2$, pro $x \in \left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right) \cup \left(2+\sqrt{2}; +\infty\right)$ je funkce konvexní, pro $x \in \left(2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\right)$ je funkce konkávní, asymptota $y=0$ pro $x \to +\infty$.

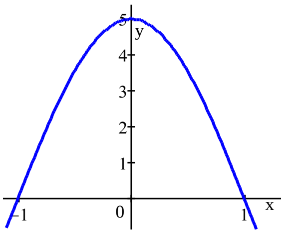
f) $D(f)=\mathbf{R}$, je sudá, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, P_x nemá, $P_y=[0,\, 1]$, lok. min. v bodě $x=0$, funkce je konvexní v *D*(*f*), asymptoty nemá.

g) $D(f)=(0,\, \infty)$, lok.min. v bodě $x=e$, IB v bodě $x=e^2$, asymptota $x=1$.

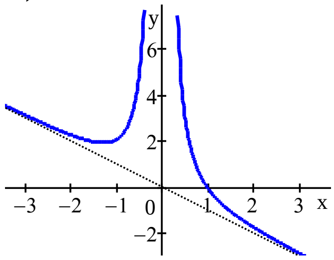
h) $D(f)=\mathbf{R}$, lok.max.v bodě $x=-1$, lok.min.v bodě $x=1$, IB v bodě $x=0$,asymptoty $y=x\pm\pi$.

Grafy:

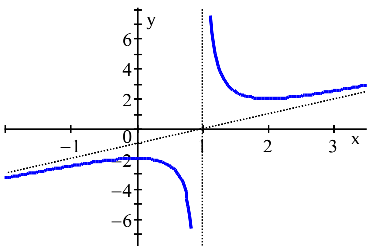
a)



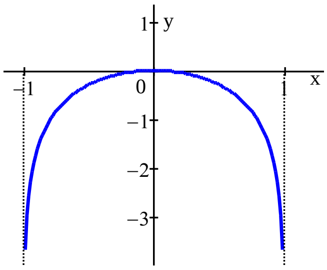
b)



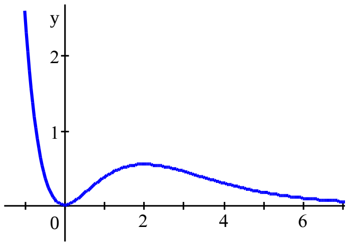
c)



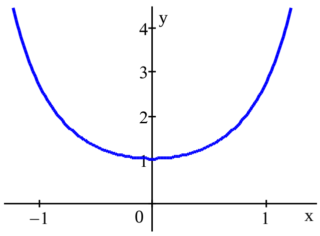
d)



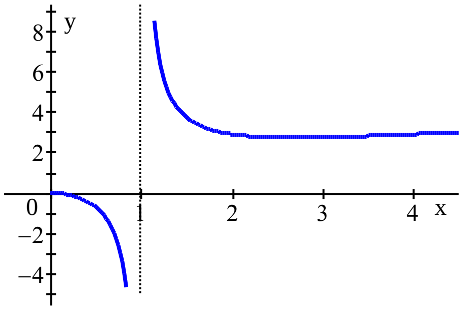
e)



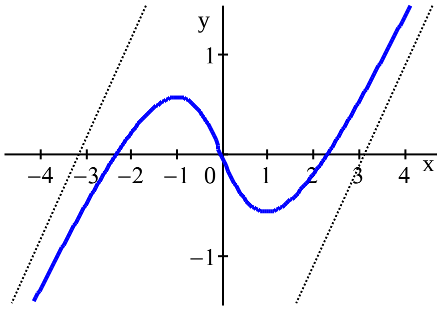
f)



g)



h)



Shrnutí kapitoly

Výpočet limity neurčitých výrazů s využitím derivací.

Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, nebo $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=\infty$, platí $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, pokud limita vpravo existuje. Ostatní typy limit neurčitých výrazů se na tento tvar převádí.

Vyšetřování, kdy je funkce rostoucí a kdy je klesající.

Jestliže na intervalu platí $f'(x)>0$, pak je *f* na tomto intervalu rostoucí.

Jestliže na intervalu platí $f'(x)<0$, pak je *f* na tomto intervalu klesající.

Vyšetřování lokálních a absolutních extrémů funkce.

Funkce má v bodě x_0 lokální maximum, jestliže v nějakém okolí bodu x_0 platí $f(x_0) \geq f(x)$. Obdobně se definuje lokální minimum. Jestliže platí $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, má funkce v bodě x_0 lokální maximum, pro $f''(x_0) > 0$ lokální minimum.

Vyšetřování konvexity a konkávity funkce.

Funkce je konvexní, jestliže její graf leží nad svou tečnou. Tuto vlastnost funkce vyšetřujeme pomocí její druhé derivace : jestliže na intervalu platí $f''(x) > 0$, pak je funkce na tomto intervalu konvexní.

Analogicky se definuje a vyšetřuje konkávita funkce.

Bod grafu funkce se nazývá inflexní bod, jestliže je funkce v jeho levém okolí konvexní a v pravém ryze konkávní nebo naopak.

Využití poznatků z diferenciálního počtu k vyšetřování průběhu funkce.

Vyšetřováním průběhu funkce nazýváme úlohu, při které využíváme všechny charakteristické vlastnosti funkce, které jsme se naučili vyšetřovat pomocí diferenciálního počtu. Cílem je pak s využitím těchto poznatků načrtnout co nejpřesněji graf funkce.

Klíčové pojmy

- L´Hospitalovo pravidlo,
- monotónnost funkce,
- lokální extrémy,
- absolutní extrémy,
- konvexita a konkávita,
- inflexní bod,
- vyšetřování průběhu funkce.

Samostatný test

A. Teoretická část

1. Rozhodněte, která tvrzení jsou pravdivá :

a) L´Hospitalovo pravidlo se používá pro výpočet limit neurčitých výrazů typu $\left\|\frac{0}{0}\right\|$ nebo $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$.

b) Je-li $f'(x) < 0$ na intervalu **I**, je funkce $f(x)$ na tomto intervalu rostoucí.

c) Ve stacionárním bodě má funkce vždy lokální extrém.

d) Funkce $f(x)$ se nazývá konkávní v bodě x_0, jestliže graf funkce leží v jistém okolí bodu x_0 pod tečnou v tomto bodě.

2. Použijeme-li pro výpočet limity L´Hospitalovo pravidlo, můžeme ho použít : a) právě jednou, b) nejvýše dvakrát, c) počet jeho použití není omezený.

3. Charakterizujte stacionární bod funkce.

4. Může mít spojitá funkce lokální extrém v bodě, ve kterém nemá derivaci?

5. Platí-li, že $f''(x_0) > 0$, pak

a) funkce má v bodě x_0 inflexní bod,

b) pokud je navíc $f'(x_0) = 0$, má funkce v bodě x_0 lokální minimum,

c) je funkce v bodě x_0 konvexní.

B. Praktická část

1. Pomocí L´Hospitalova pravidla vypočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$, b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (1-\sin x).\mathrm{tg}x$, c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}$, d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \sin x^{\mathrm{tg}x}$.

2. Určete intervaly monotónnosti funkce :

a) $y = (2x+3)(x^2+x+1)$, b) $y = 3x - x^3$, c) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$, d) $y = x^2 e^x$.

3. Najděte lokální extrémy funkcí :

a) $y = \sin 2x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, b) $y = x^3 - 3x + 20$, $x \in \langle -3, 3\rangle$, c) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$, d) $y = \ln^2 x$.

4. Určete intervaly, ve kterých je daná funkce konvexní, konkávní a určete inflexní body, pokud existují : a) $y = x^4 - x^3$, b) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$, c) $y = e^x(1-2x)$.

5. Vyšetřete průběh funkce : a) $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 2x^3$, b) $y = \dfrac{9(x+1)}{x^2}$, c) $y = 2x^2 - \ln x$.